房间里的大象——行列式布局

洪继展

华侨大学数学科学学院

2019 年 11 月 17 日

房间里的大象

一个 n 阶行列式表示由它的 n 个列向量 (或者行向量) 所确定的 n 维空间当中的“平行体”的“带符号的体积 (或称容量)”——这个事实为线性代数和高等代数教师所熟知，但是却很少在国内教材和课堂上被详细地讨论.

房间里的大象

一个 n 阶行列式表示由它的 n 个列向量 (或者行向量) 所确定的 n 维空间当中的“平行体”的“带符号的体积 (或称容量)”——这个事实为线性代数和高等代数教师所熟知，但是却很少在国内教材和课堂上被详细地讨论. 大部分国内教材介绍行列式的方法还是使用抽象的代数定义,

房间里的大象

一个 n 阶行列式表示由它的 n 个列向量 (或者行向量) 所确定的 n 维空间当中的"平行体"的"带符号的体积 (或称容量)"——这个事实为线性代数和高等代数教师所熟知，但是却很少在国内教材和课堂上被详细地讨论. 大部分国内教材介绍行列式的方法还是使用抽象的代数定义，常见的做法有两种：

(1). 使用排列和逆序数介绍 n 阶行列式的定义；

(2). 使用代数余子式递归定义；

房间里的大象

一个 n 阶行列式表示由它的 n 个列向量 (或者行向量) 所确定的 n 维空间当中的“平行体”的“带符号的体积 (或称容量)”——这个事实为线性代数和高等代数教师所熟知，但是却很少在国内教材和课堂上被详细地讨论. 大部分国内教材介绍行列式的方法还是使用抽象的代数定义，常见的做法有两种：

(1). 使用排列和逆序数介绍 n 阶行列式的定义；

(2). 使用代数余子式递归定义；

而且一般讨论行列式的作为带符号体积的几何意义的时候，大部分都只讨论 2 阶和 3 阶的情况.

从学生的反映来看，前面所说的两种定义方法“动机性”都比较弱.

从学生的反映来看，前面所说的两种定义方法"动机性"都比较弱.
借此在诸位专家面前班门弄斧的机会，下面是我认为可行的一种策略.

行列式概念的引入

仍然使用二维平面上的情形，获得“带符号面积”应该有的性质．然后类推到 n 为空间．

行列式概念的引入

仍然使用二维平面上的情形，获得"带符号面积"应该有的性质. 然后类推到 n 为空间.

$n=1$: 微积分中 $y=x$ 和性质比 $y=|x|$ 的性质容易研究，因为 $y=x$ 具有线性性，是"带符号的长度".

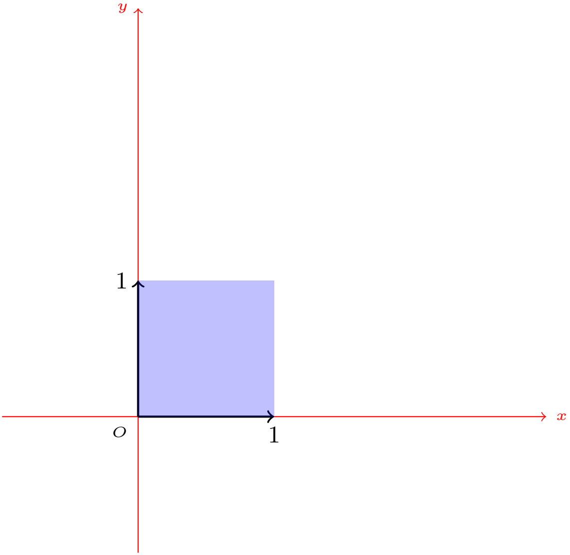
二维平面上的有向面积

定义平面上的两个向量 α_1 和 α_2 所确定的**平行四边形**为集合

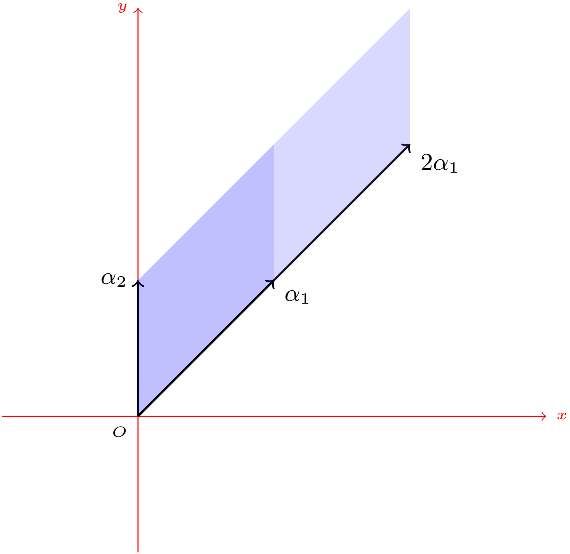
$$\{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \mid 0 \leq c_1, c_2 \leq 1\}$$

所确定的平面点集.

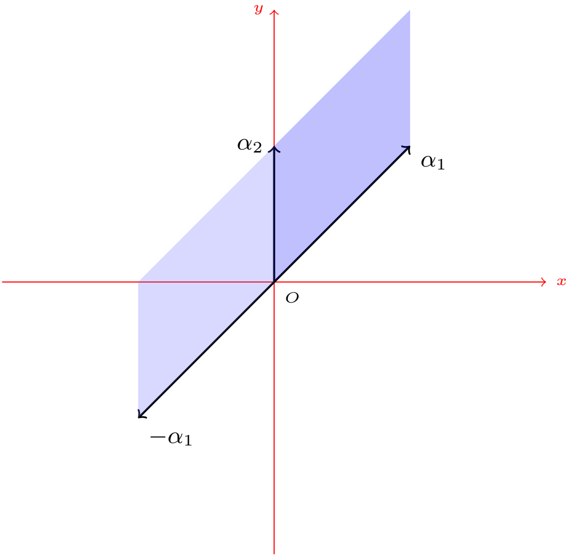
规范性：



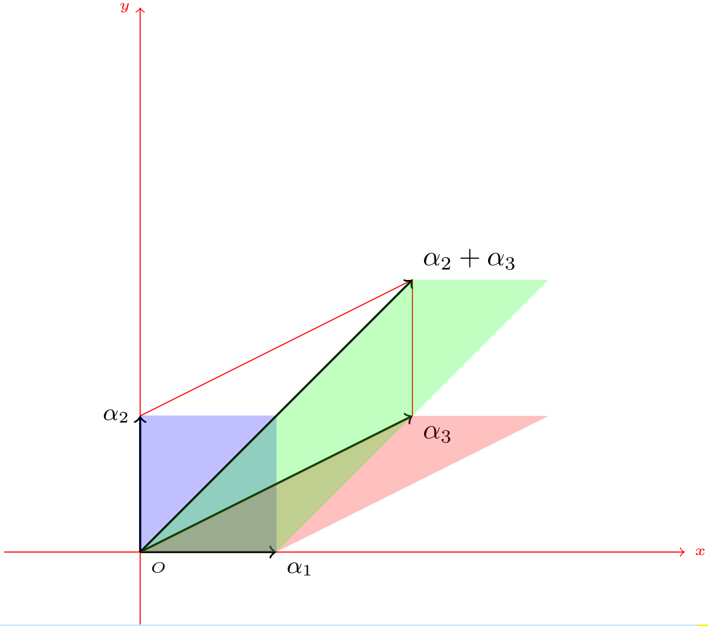
线性性：



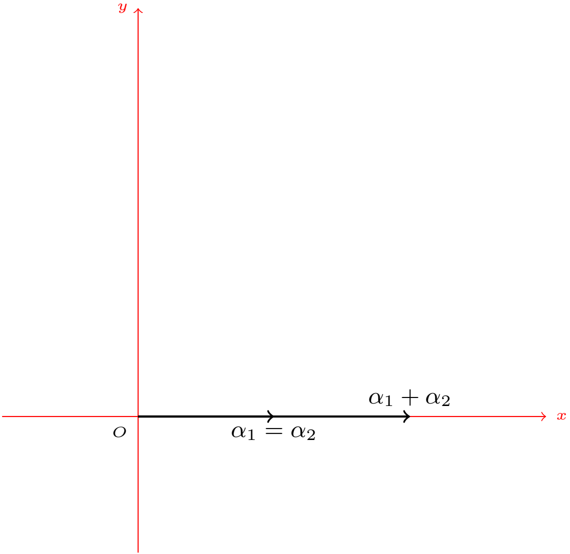
线性性：



线性性：



反对称性：



定义

假设 n 是一个正整数. 我们定义 V 为如下的一个对应规则：给定任意的 $\mathbf{R}^n$ 当中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 都是一个唯一确定的数,

定义

假设 n 是一个正整数. 我们定义 V 为如下的一个对应规则：给定任意的 $\mathbf{R}^n$ 当中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 都是一个唯一确定的数，而且 V 满足以下三条性质：

(1). 规范性：$V(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1$;

定义

假设 n 是一个正整数. 我们定义 V 为如下的一个对应规则：给定任意的 $\mathbf{R}^n$ 当中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 都是一个唯一确定的数，而且 V 满足以下三条性质：

(1). 规范性：$V(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1$;

(2). 多重线性性：

- 对于任意的指标 i, 和任意的 n 维向量 β_i, 总有
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_n) =$
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + V(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n)$.

定义

假设 n 是一个正整数. 我们定义 V 为如下的一个对应规则：给定任意的 $\mathbf{R}^n$ 当中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 都是一个唯一确定的数，而且 V 满足以下三条性质：

(1). 规范性：$V(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1$;

(2). 多重线性性：

- 对于任意的指标 i, 和任意的 n 维向量 β_i, 总有
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_n) =$
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + V(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n)$.
- 对于任意的数 k, 和任意的指标 i, 总有
  $V(\alpha_1, \ldots, k\alpha_i, \ldots, \alpha_n) = kV(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;

定义

假设 n 是一个正整数. 我们定义 V 为如下的一个对应规则：给定任意的 $\mathbf{R}^n$ 当中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 都是一个唯一确定的数，而且 V 满足以下三条性质：

(1). 规范性：$V(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = 1$;

(2). 多重线性性：

- 对于任意的指标 i, 和任意的 n 维向量 β_i, 总有
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_n) =$
  $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + V(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n)$.
- 对于任意的数 k, 和任意的指标 i, 总有
  $V(\alpha_1, \ldots, k\alpha_i, \ldots, \alpha_n) = kV(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;

(3). 反对称性：如果 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 中有两个向量相同，那么 $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

定理

上一页定义中的对应规则 V 存在而且唯一.

定理

上一页定义中的对应规则 V 存在而且唯一.

证明

唯一性：记 $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$, 则

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \ldots k_n \\ \text{是一个 } n \text{ 级排列}}} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} V(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}),$$

其中 $V(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}) = (-1)^{l(k_1 k_2 \ldots k_n)}$, $l(k_1 k_2 \ldots k_n)$ 是排列 $k_1 k_2 \ldots k_n$ 的**长度**.

定理

上一页定义中的对应规则 V 存在而且唯一.

证明

唯一性：记 $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$, 则

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \ldots k_n \\ \text{是一个 } n \text{ 级排列}}} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} V(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}),$$

其中 $V(\epsilon_{k_1}, \ldots, \epsilon_{k_n}) = (-1)^{l(k_1 k_2 \ldots k_n)}$, $l(k_1 k_2 \ldots k_n)$ 是排列 $k_1 k_2 \ldots k_n$ 的**长度**.

存在性：上式满足定义中的所有性质.

方阵的行列式

定义

假设$\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$是一个$n$阶方阵，那么我们定义它的行列式为

$$|\boldsymbol{A}| := \det(\boldsymbol{A}) := V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

行列式的性质

常见的行列式的性质都能够比较自然地推导出来.

几何解释——n 维平行体的带符号体积

定义 n 维空间中的 n 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 所确定的**平行体**为集合

$$\{c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \mid 0 \le c_1, \dots, c_n \le 1\}$$

所确定的平面点集.

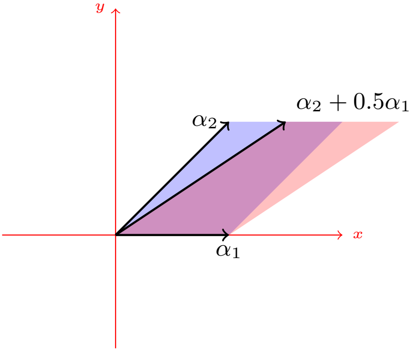
几何解释——n 维平行体的带符号体积

定义 n 维空间中的 n 个向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 所确定的**平行体**为集合

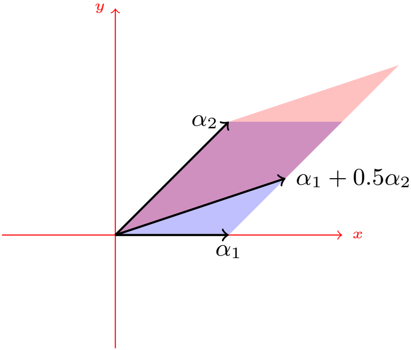
$$\{c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \mid 0 \leq c_1, \ldots, c_n \leq 1\}$$

所确定的平面点集.

n 维平行体的体积满足错切不变性，行列式满足对第三种初等变换的不变性.



y
$\alpha_2 + 0.5\alpha_1$
α_2
x
α_1



y
α_2
$\alpha_1 + 0.5\alpha_2$
x
α_1

不妨假设$\boldsymbol{A}$的n个列向量是线性无关的,

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 记 $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

不妨假设$\boldsymbol{A}$的n个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 记$\boldsymbol{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. 容易发现$\boldsymbol{B}$ 是通过对$\boldsymbol{A}$做第三种列初等变换得到的,

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 记 $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. 容易发现 $\boldsymbol{B}$ 是通过对 $\boldsymbol{A}$ 做第三种列初等变换得到的，所以 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 记 $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. 容易发现 $\boldsymbol{B}$ 是通过对 $\boldsymbol{A}$ 做第三种列初等变换得到的，所以 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. 同时

$$|\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| = (\|\beta_1\| \cdot \|\beta_2\| \cdot \cdots \cdot \|\beta_n\|)^2 .$$

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是线性无关的，此时由 Gram-Schmidt 正交化得到正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 记 $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. 容易发现 $\boldsymbol{B}$ 是通过对 $\boldsymbol{A}$ 做第三种列初等变换得到的，所以 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. 同时

$$|\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| = \left(\|\beta_1\| \cdot \|\beta_2\| \cdot \cdots \cdot \|\beta_n\|\right)^2 .$$

所以 $|\boldsymbol{A}|$ 的绝对值等于 $\|\beta_1\| \cdot \|\beta_2\| \cdot \cdots \cdot \|\beta_n\|$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组所确定的 n 维平行体的体积.

谢　谢！